ESTADO LIBRE ASOCIADO DE
PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad TR.5: Resolver Ecuaciones trigonométricas
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)	
Resumen de la Unidad:	En esta unidad, los estudiantes crearán modelos y calcularán soluciones de ecuaciones trigonométricas por medio de la transformación de funciones trigonométricas. Crearán, describirán y harán predicciones sobre fenómenos periódicos para resolver situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)

PE1 ¿Qué debe ocurrir para que una ecuación se denomine una ecuación trigonométrica?

CD1 Contener una expresión trigonométrica con una variable.

PE2 ¿Cuál es la condición principal para clasificar una identidad trigonométrica?

CD2 Ser una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométrica.

PE3 ¿Cómo saber cuándo utilizar una identidad trigonométrica para resolver una ecuación trigonométrica?

CD3 Cuando la ecuación trigonométrica contiene más de una función.

Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)

T1. Los estudiantes desarrollaran la capacidad para resolver ecuaciones trigonométricas básicas o usando identidades para interpretar, predecir y resolver situaciones de la vida diaria

El estudiante adquiere destrezas para…

A1. Resolver ecuaciones trigonométricas básicas hallando todas las soluciones en [0,2π].

A2. Resolver ecuaciones trigonométricas mediante factorización.

A3. Resolver ecuaciones trigonométricas que requieran el uso de identidades.

A4. Utilizar funciones trigonométricas para construir modelos y resolver problemas matemáticos y de la vida diaria.

Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)

Estándar de Funciones

ES.F.24.4	Representa las funciones trigonométricas por medio de tablas, gráficas, expresiones verbales y ecuaciones. • Evalúa funciones trigonométricas para un número real dado. • Reconoce las características principales de cada una de las funciones trigonométricas (el dominio, el recorrido, las intersecciones con los ejes, los valores máximos y mínimos, las asíntotas y los intervalos donde es creciente o decreciente).
ES.F.29.1	Utiliza funciones trigonométricas para construir modelos y resolver problemas matemáticos y de la vida diaria.
ES.F.29.5	Utiliza diferentes estrategias para resolver ecuaciones trigonométricas.
Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	
PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

Unidad TR.5: Resolver Ecuaciones trigonométricas
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominios y destrezas** *(El estudiante podrá…)*	**Tareas de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
PRCS: **ES.F.24.4** **ES.F.29.1** **ES.F.29.5** **PM:** **PM1** **PM3** **PM4** **PM6** **PM8** **PE/CD:** **PE1/CD1** **PE2/CD2** **PE3/CD3** **T/A:** **T1/A1/A2/A3/ A4**	• Cómo resolver ecuaciones trigonométricas con diferentes estrategias. • Utilizar funciones trigonométricas para construir modelos y resolver problemas matemáticos y del mundo real. • Escoger funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud, frecuencia y línea media dadas.	*Patrones y relaciones* • Utilizar diferentes estrategias para resolver ecuaciones trigonométricas hallando todas las soluciones [0, 2 π]: por factorización, usando identidades, usando la gráfica, usando ángulos múltiples, y calculadora. • Evaluar las soluciones de ecuaciones al utilizar la calculadora y las interpreta en términos del contexto. • Evalúa soluciones de	*Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.* ***Quién tiene la razón*** • Los estudiantes demostraran su comprensión de las funciones trigonométricas por medio del análisis de la equivalencia de dos funciones. ***Investigando cómo resolver una ecuación trigonométrica*** • Los estudiantes demostraran su comprensión de las ecuaciones trigonométricas analizando un ejemplo dado.	***Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta*** • Resuelve: $2senx - 1 = 0$ $3tan\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$ $sec^2x - 2tanx = 4$ ***Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)*** • La maestra de Luisa le ha dicho a la clase que José estuvo ausente mientras se trabajó la lección de ecuaciones trigonométricas y estará ausente por varios días. Por lo tanto le pide a la clase que escriba una carta explicándole como resolver ecuaciones trigonométricas. La carta debe ser lo más detallada posible para ayudar a José entender el material. Deberás ser creativo asegurándote usar el lenguaje y terminología matemático. También incluirás un ejemplo y una explicación completa de cómo resolver cada una de las ecuaciones estudiadas. ***Papelito de entrada (ejemplos rápidos)*** Use la información para orientar la clase del día. • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior.	*Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.* ***Adivinanza numérica*** • En esta actividad los estudiantes practicaran resolviendo ecuaciones trigonométricas luego de traducir expresiones lingüísticas en ecuaciones trigonométricas. ***"Donde está el error"*** • Para esta actividad los estudiantes analizaran dos formas distintas de resolver una ecuación trigonométrica para investigar donde está el error y explicar porque ***Ejemplo 1 para planes de la lección: Despeje Directo*** • Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el ángulo. El ángulo, que no necesariamente es *x*. Recordar que todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones, según lo

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	**Enfoque de contenido** *(El estudiante comprenderá…)*	**Dominios y destrezas** (*El estudiante podrá…)*	**Tareas de desempeño**	**Otra evidencia**	**Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección**
		una ecuación trigonométrica utilizando la tecnología y las interpreta en términos del contexto. • Resuelve problemas de la vida diaria y construye modelos que involucren aplicaciones de ecuaciones trigonométricas.		• Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica qué fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. ***Papelito de salida (ejemplos rápidos)*** • En la clase de hoy aprendí _______. • Hoy estuve confundido con _______.	visto. (ver abajo)
Vocabulario de Contenido					
• Ecuaciones • Ecuaciones trigonométricas • Factorización • Identidades trigonométricas					

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **McGraw Hill**
  - *Matemáticas Integradas I, II, III*
- **Raymond Barnett**
  - *Pre cálculo: Funciones y gráficas*
- **Glencoe**
  - *Algebra I*

Recursos adicionales

- http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/84p/TI84Plus_guidebook_ES.pdf
- http://isa.umh.es/calc/TI/TI83/TI83manual-spa.pdf

Tareas de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

¿Quién tiene la razón?

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de las funciones trigonométricas por medio del análisis de la equivalencia de dos funciones. Dados los problemas a continuación, los estudiantes crearán su propia "crítica del maestro" para los estudiantes en el problema. Evalúa el trabajo de los estudiantes en la rúbrica de evaluación (ver anejo: "Organizador - Rúbrica de tarea de desempeño").
- Dadas las siguientes ecuaciones, determina la amplitud, el periodo, la frecuencia y cambio de fase de cada ecuación.

$$y = 2sen\left(\frac{\pi}{3}(x-2)\right) - 4$$

$$y = -4 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-3.5)\right)$$

- Se oye a dos estudiantes, Anthony y Christian, discutiendo estas ecuaciones; Anthony está seguro de que las ecuaciones son equivalentes, mientras que Christian insiste en que son diferentes. ¿Cuál de los dos tiene la razón? Explica tu respuesta de forma exhaustiva usando gráficas y un párrafo escrito que respalde tu postura.

(Fuente: http://www.amaps.org/leftfiles/Syllabi/Algebra%202%20Sample%20Tasks.pdf)

Investigando cómo resolver una ecuación trigonométrica que es elemental

- Si una ecuación trigonométrica no es de la forma elemental, aplicaremos las identidades trigonométricas para obtener un mismo tipo de arco trigonométrico (en lo posible); luego se realizan operaciones algebraicas para reducirle y finalmente aplicamos los procedimientos para resolver una ecuación trigonométrica elemental.
- No existen reglas generales para transformar una ecuación trigonométrica dada la forma de una ecuación trigonométrica elemental.
- Cuando se haya logrado una solución por medio de una elevación a alguna potencia de los dos lados de la ecuación o por medio de multiplicaciones o divisiones de expresiones que comprenden a la variable, debemos comprobar cada solución potencial por medio de sustituciones dentro de la ecuación. Las soluciones potenciales que no satisfagan la ecuación son rechazadas, éstas se denominan soluciones extrañas. Los ejercicios que se dan a continuación muestran algunas clases de soluciones de ecuaciones trigonométricas.
- Tarea Resuelva la ecuación:
- Resolución:
  A partir de la ecuación sen x + cos x = –1
  $(\text{sen } x + \cos x)^2 = (-1)^2$ elevando al cuadrado se obtiene
  1 + sen 2x = 1 para su mayor comprensión revise identidad de ~~arco~~ doble ángulo
  sen 2x = 0
  Creo que sigue esto:
  Sen (2x) =0

2senxcosx=0
Sen x cos x=0
Sen x =0 ó   co sx=0
Si sen x=0   => x=0 ó x = π   ó x=2π
Si cos x =0 => x = π/2 ó x= 3π/2
Estas soluciones hay que verificarlas en la ecuación original para ver si son solución de la misma.
Por lo tanto el conjunto solución es: { π, 3π/2}
ya que arc sen (0) = 0
Despejando x se obtiene:
Como tenemos, como posible soluciones.
A continuación, dichas soluciones tendrán que ser comprobadas en la ecuación original:
(sen x + cos x = 1)

Actividades de aprendizaje sugeridas

Adivinanza numérica

- En esta actividad el estudiante trabajara en como traducir una frase lingüística a una ecuación trigonométrica.
- Una ecuación trigonométrica también va a ser una especie de *"adivinanza numérica"*, solamente que relacionada con una función trigonométrica. Por ejemplo: *"El seno de un ángulo más el coseno de ese mismo ángulo es igual a* 1.328926*. ¿Cuál es ese ángulo?"*. El alumno puede comprobar con su calculadora que la respuesta es **25°**; pero evidentemente que esa respuesta no es posible encontrarla por tanteo. Debe existir un procedimiento matemático que lleve a la solución, el cual es el planteamiento de una ecuación trigonométrica:
  $\text{sen } x + \cos x = 1.328926$
- Resolver ecuaciones como la anterior es el objetivo de esta unidad. Para su estudio conviene clasificar las ecuaciones trigonométricas y mencionar el método de solución que les corresponda. Por lo tanto haz que los estudiantes trabajen en traducir una frase lingüística a una ecuación trigonométrica y que determinen si cumplen con las características de una ecuación trigonométrica.

Donde está el error

- Dado el siguiente problema: $2 \text{ sen } x = \tan x$, surge una controversia entre Pedro y María por la forma en que lo resolvieron. El estudiante tendrá que determinar dónde está el error y deberá explicar porque. (ver anejo: "TR5. Actividad de aprendizaje ¿Dónde está el error?)

Ejemplos para planes de la lección

Despeje Directo

- Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el ángulo. El ángulo, que no necesariamente es x. Recordar que todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones, según lo visto.
- Ejemplo 1: $\cos 2x = 0.642787609$
- Solución: En este caso, la función trigonométrica ya está despejada. El ángulo, es $2x$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el ángulo, se obtiene:

  $\cos 2x = 0.642787609$

  $2x = \arccos 0.642787609$

  tiene dos soluciones que son

  Primer cuadrante: Segundo cuadrante:

  $2x_1 = 50$ $2x_2 = 360 - 50$

  $x_1 = 50/2$ $2x_2 = 310$

  $x_1 = 25$ $x_2 = 310/2$

  $x_2 = 155$
- ¡Cuidado!: Al afirmar que existen dos soluciones en la ecuación trigonométrica, se refiere a que el *arco coseno de* 0.642787609 es 50 grados y también 310 grados los cuales son iguales al ángulo $2x$. No debe confundirse entonces entre que esos valores sean iguales a x a que sean iguales al ángulo, en este caso a $2x$. La realidad es que esos valores deben ser iguales siempre al ángulo.
- Ecuaciones de la forma $m \operatorname{sen} x = n \cos x$
  - Las siguientes ecuaciones trigonométricas más sencillas de resolver son las que tienen la forma $m \operatorname{sen} x = n \cos x$, donde m y n son números conocidos, ya que basta escribir la ecuación en la forma $\operatorname{sen} x / \cos x = n/m$ dividiendo la ecuación original entre $m \cos x$ y sustituir por la tangente . Luego simplemente se despeja la tangente aplicándole la función inversa y teniendo cuidado de localizar los dos valores que le corresponden por el signo de la función.
- Ejemplo 1: $4 \operatorname{sen} x = 3 \cos x$
- Solución: En este caso, $m = 4$ y $n = 3$. La ecuación se puede escribir como:

  $\operatorname{sen} x/\cos x=3/4$

  sustituyendo por la tangente, y como , se llega a que ¾= 0. 75 , $\tan x = 0.75$

aplicándole la función inversa:
$x = arc\ tan\ 0.75 = 36.87$
la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva:

Primer cuadrante	Tercer cuadrante
$X_1 = 36.87$	$x_2 = 180 + 36.87$
	$X_2 = 216.87$

- Por factorización
- Si una ecuación trigonométrica se puede factorizar, quedando igualada a cero, se puede resolver igualando a cero cada factor, en virtud de que *"dos cantidades multiplicadas dan cero solamente que por lo menos una de ellas sea cero".* Una vez igualado a cero cada factor, para resolverlo se puede utilizar cualquiera de las técnicas vistas anteriormente.
- Ejemplo 1: $8\ sen\ x\ cos\ 2x - 5\ sen\ x = 0$
- Solución: Factorizando (por factor común) $sen\ x\ (8 \cos 2x - 5) = 0$
  igualando a cero cada factor, en virtud de que *"dos cantidades multiplicadas dan cero solamente que por lo menos una de ellas sea cero"* se obtiene:

ECUACION ORIGINAL FACTORIZADA	FACTORES IGUALADOS A CERO	SOLUCIONES	
	$sen\ x = 0$	$X_1 = 0$ $X_2 = 180$	
$sen\ x\ (8\ cos\ 2x - 5) = 0$	$8\ cos\ 2x - 5 = 0$ $8\ cos\ 2x = 5$ $cos\ 2x = 5/8$ $cos\ 2x = 0.625$	Primer cuadrante $\alpha = arc\ cos 0.625$ $\alpha = 51.31781255$ $2x_{3=}51.31781255$ $x_3 = 51.31781/2$ $x_3 = 25.65890627$	Segundo cuadrante $\alpha = arc\ cos 0.625$ $\alpha = 51.31781255$ $2x_{4=} = 360 - 51.31781255$ $2x_4 = 308.6821875$ $x_{4=} = 308.6821875/2$ $x_{4=}154.3410937$

- En síntesis, las cuatro soluciones son:

$x1 = 0$
$x2 = 180$
$x3 = 25.65890627$
$x4 = 154.3410937$

- Comprobaciones:
  a) Para $x1 = 0$, sustituyendo en la ecuación original $8\ sen\ x\ cos\ 2x - 5\ sen\ x = 0$, se obtiene:
  $$8 \text{ sen } 0 \cos 2(0) - 5 \text{ sen } 0 = 0$$
  $$8\ (0)(1) - 5\ (0) = 0$$
  $$0 = 0$$
  b) Para $x2 = 180$, sustituyendo en la ecuación original $8\ sen\ x\ cos\ 2x - 5\ sen\ x = 0$, se obtiene:
  $$8 \text{ sen } 180 \cos 2(180) - 5 \text{ sen } 180 = 0$$
  $$8\ (0)(1) - 5\ (0) = 0$$
  $$0 = 0$$
  c) Para $x3 = 25.65890627$, sustituyendo en $8\ sen\ x\ cos\ 2x - 5\ sen\ x = 0$, se obtiene:
  $$8 \text{ sen } 25.65890627 \cos 2(25.65890627) - 5 \text{ sen } 25.65890627 = 0$$
  $$8\ (0.433012701)(0.625) - 5\ (0.433012701) = 0$$
  $$0 = 0$$
- Nota: En realidad, con esos dígitos no da cero, sino 0.1, pero mientras más decimales se tomen, más se aproximará el resultado a cero.
  d) Para $x4 = 154.3410937$, sustituyendo en $8\ sen\ x\ cos\ 2x - 5\ sen\ x = 0$, se obtiene:
  $$8 \text{ sen } 154.3410937 \cos 2(154.3410937) - 5 \text{ sen } 154.3410937 = 0$$
  $$8\ (0.433012701)(0.625) - 5\ (0.433012701) = 0$$
  $$0 = 0$$

Nota: En realidad, con esos dígitos no da cero, sino 0.1, pero mientras más decimales se tomen, más se aproximará el resultado a cero.